MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 11
17.1.2020

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“ -Lösungsvorschlag-

1. Um eine Vermutung für eine explizite Darstellung der Folge (a_n) zu erhalten, berechnen wir ihre ersten Glieder zu Fuß: Es ist

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= \frac{2a_1}{2+a_1} = \frac{2\cdot 1}{2+1} = \frac{2}{3}, \\ a_3 &= \frac{2a_2}{2+a_2} = \frac{2\cdot\frac{2}{3}}{2+\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}, \\ a_4 &= \frac{2a_3}{2+a_3} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Bis hierhin erkennt man wahrscheinlich noch keine Regelmäßigkeit. Rechnen wir also weiter:

$$\begin{aligned} a_5 &= \frac{2a_4}{2+a_4} = \frac{2\cdot\frac{2}{5}}{2+\frac{2}{5}} = \frac{1}{3}, \\ a_6 &= \frac{2a_5}{2+a_5} = \frac{2\cdot\frac{1}{3}}{2+\frac{1}{3}} = \frac{2}{7}, \\ a_7 &= \frac{2a_6}{2+a_6} = \frac{2\cdot\frac{2}{7}}{2+\frac{2}{7}} = \frac{1}{4}, \\ a_8 &= \frac{2a_7}{2+a_7} = \frac{2\cdot\frac{1}{4}}{2+\frac{1}{4}} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Jetzt (spätestens) kann man einige Gesetzmäßigkeiten erkennen – beispielsweise, daß die Zähler der Brüche jeweils abwechselnd 1 und 2 sind. Ganz augenfällig wird die Struktur, wenn wir die Brüche so erweitern, daß sie *alle* als Zähler 2 haben:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{9}$

Jetzt kommen wir sofort zur **Vermutung**, daß $a_n = \frac{2}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Diese versuchen wir nun mittels vollständiger Induktion zu beweisen.

Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Dann ist $a_1 = 1 = \frac{2}{1+1}$ ✓ (klar, unsere Vermutung ist ja so gebaut, daß sie für $n = 1, 2, \ldots, 8$ auf jeden Fall richtig ist).

Induktionsschluß: $n \to n+1$: Es sei $n \geq 1$ und es gelte

$$a_n = \tfrac{2}{n+1} \qquad (\textbf{Induktionsvoraussetzung}).$$

Zu zeigen: $a_{n+1} = \frac{2}{n+2}$ (**Induktionsbehauptung**).

Nun ist aber ist nach der rekursiven Definition der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_{n+1} \overset{\text{Rek.Formel}}{=} \frac{2a_n}{2+a_n} \overset{\text{Ind.Vor.}}{=} \frac{2\cdot\frac{2}{n+1}}{2+\frac{2}{n+1}} = \frac{4}{2(n+1)+2} = \frac{4}{2n+4} = \frac{2}{n+2},$$

wie behauptet.
Nach dem Induktionsprinzip ist damit unsere Vermutung bewiesen, d.h. es ist $a_n = \frac{2}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Wir zeigen die Aussage

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ gilt} \quad a_n = \frac{2}{3}\left(1 + (-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}\right)$$

mit vollständiger Induktion (nach n).

Induktionsanfang: Sei $n = 0$. Dann ist $a_0 = 0$
sowie

$$\frac{2}{3}\left(1 + (-1)^{0+1}\frac{1}{2^0}\right) = \frac{2}{3}(1-1) = 0,$$

die Aussage stimmt also.

Induktionsschluß: $n \to n+1$: Es sei $n \geq 0$ und es gelte

$$a_k = \frac{2}{3}\left(1 + (-1)^{k+1}\frac{1}{2^k}\right) \quad \text{für alle} \quad k \in \{0, 1, ..., n\}. \qquad (\textbf{Induktionsvoraussetzung}).$$

Zu zeigen ist

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}\left(1 + (-1)^{n+2}\frac{1}{2^{n+1}}\right). \qquad (\textbf{Induktionsbehauptung}).$$

Wir müssen, damit die Rekursionsformel greift, die beiden Fälle unterscheiden:

1. Fall: $n = 0$. Hier rechnen wir die Gültigkeit der Induktionsbehauptung direkt nach:
Es ist $a_{0+1} = a_1 = 1$, und auch $\frac{2}{3}\left(1 + (-1)^{0+2}\frac{1}{2^{0+1}}\right) = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$.
Diesen Fall kann man auch in den Induktionsanfang stecken und damit dort die Aussage für $n = 0$ und $n = 1$ nachweisen!

2. Fall: $n \geq 1$.
Dann dürfen wir die Rekursionsformel einsetzen. Es ist

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\overset{\text{Rek.Formel}}{=} \frac{1}{2} \cdot (a_{n-1} + a_n) \\
&\overset{\text{Ind.Vor.}}{=} \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2}{3}\left(1 + (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{2}{3}\left(1 + (-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 + (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}} + 1 + (-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(2 + (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + (-1)^1 \frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(2 + (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(2 + (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(2 + (-1)^n \frac{1}{2^n}\right) \\
&= \frac{2}{3} \cdot \left(1 + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}}\right),
\end{aligned}$$

und dies zeigt die Behauptung, da $(-1)^n = (-1)^{n+2}$ gilt wegen $(-1)^2 = 1$.

3. a) Es ist für $n, k \in \mathbb{N}_0, 1 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-(k-1))! \cdot (k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$= \frac{n! \quad \cdot k}{(n-k+1))! \cdot (k-1)! \quad \cdot k} + \frac{n! \quad \cdot (n-k+1)}{(n-k)! \cdot (n-k+1) \quad \cdot k!} \qquad \text{(Erweitern, um ...}$$

$$= \frac{n! \cdot k}{(n-k+1)! \cdot k!} + \frac{n! \cdot (n-k+1)}{(n-k+1)! \cdot k!} \qquad \text{... Hauptnenner herzustellen)}$$

$$= \frac{n! \cdot (k+n-k+1)}{(n-k+1)! \cdot k!}$$

$$= \frac{n! \cdot (n+1)}{(n-k+1)! \cdot k!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)! \cdot k!} = \binom{n+1}{k}. \quad \checkmark$$

b) Wir fixieren $k \in \mathbb{N}_0$ und beweisen für dieses feste k die Aussage

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N}_0, n \geq k, \quad \text{gilt} \quad \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

durch vollständige Indultion nach n.

Induktionsanfang: Sei $n = k$. Dann ist die linke Seite $\sum_{j=k}^{k} \binom{k}{j} = \binom{k}{k} = 1$; die rechte Seite ist $\binom{k+1}{k+1} = 1$, so daß die Aussage in diesem Fall stimmt.

Induktionsschluß: $n \to n+1$: Es sei $n \geq k$ und es gelte

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1} \qquad \text{(\textbf{Induktionsvoraussetzung}).}$$

Zu zeigen ist

$$\sum_{j=k}^{n+1} \binom{j}{k} = \binom{n+2}{k+1} \qquad \text{(\textbf{Induktionsbehauptung}).}$$

Es ist

$$\sum_{j=k}^{n+1} \binom{j}{k} = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} + \binom{n+1}{k} \overset{\text{Ind.Vor.}}{=} \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} \overset{(*)}{=} \binom{n+2}{k+1},$$

wobei wir im Schritt $(*)$ die Rekursionsformel 6.2b) für die Binomialkoeffizienten aus der Vorlesung verwenden, die gerade in a) bewiesen wurde.

4. Wir verwenden folgende Strategie:

Wähle zuerst $\boxed{x_1 := 1}$. Dann sagt uns die Sphinx den Wert

$$p(x_1) = a_n 1^n + a_{n-1} 1^{n-1} + \ ... \ + a_1 \cdot 1 + a_0 \quad = \quad a_n + a_{n-1} + \ ... \ + a_1 + a_0.$$

$p(x_1)$ ist also die Summe der uns noch nicht bekannten Koeffizienten, wegen $a_k \in \mathbb{N}_0$, und weil nicht alle a_k gleich 0 sein können, ist aber $p(x_1) \in \mathbb{N}$ und es gilt $0 \leq a_k \leq p(x_1)$ für alle $k = 0, 1, ..., n$.

Wähle dann $\boxed{x_2 := p(x_1) + 1}$. Die Sphinx sagt uns jetzt den Wert

$$p(x_2) = a_n x_2^n + a_{n-1} x_2^{n-1} + \ ... \ + a_1 x_2 + a_0.$$

Weil $x_2 > 1$ und $0 \leq a_k < x_2$ für alle $k = 0, 1, ..., n$, bilden die Zahlen $a_0, a_1, ..., a_n$ die Ziffern der x_2-adischen Darstellung von $p(x_2)$. Diese Darstellung ist nach Satz 5.13 der Vorlesung eindeutig bestimmt, und läßt sich, zusammen mit dem n, mit Hilfe der Division mit Rest ermitteln. Damit kommen wir an der Sphinx vorbei.

Beispiel:

Die Sphinx denkt sich das folgende Polynom 4. Grades

$$p(x) = 3x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 1x + 13.$$

Wir nennen $\boxed{x_1 := 1}$ und erhalten den Wert

$$p(x_1) = 19.$$

Wir nennen nun $\boxed{x_2 := 19 + 1 = 20}$, und erhalten den Wert

$$p(x_2) = 480833.$$

Nun bestimmen wir die 20-adische Darstellung von $a = 480833$, und zunächst die größte Potenz von $b = 20$, die nicht größer ist als die Zahl a ist: Wegen

$$\begin{aligned}
20^0 &= 1,\\
20^1 &= 20,\\
20^2 &= 400,\\
20^3 &= 8000,\\
20^4 &= 160000,\\
20^5 &= 3200000 > a
\end{aligned}$$

ist dies $20^4 = 160000$. Damit ist $n = 4$.
Nun dividieren wir, unter Verwendung unserer Liste der Potenzen von 20, wiederholt mit Rest:

$$\begin{aligned}
480833 &= \mathbf{3} \cdot 20^4 + 833\\
833 &= \mathbf{0} \cdot 20^3 + 833\\
833 &= \mathbf{2} \cdot 20^2 + 33\\
33 &= \mathbf{1} \cdot 20^1 + 13\\
13 &= \mathbf{13} \cdot \boxed{20^0} + 0.
\end{aligned}$$

Die $q's$, also die **Zahlen vor den Potenzen von 20**, sind, von oben nach unten notiert, die Ziffern der 20-adischen Darstellung von a, also $a = 480833 = (3021D)_{20}$ (dabei steht der Buchstabe D für die Zahl 13).

Es ist also

$$480833 = 3 \cdot 20^4 + 0 \cdot 20^3 + 2 \cdot 20^2 + 1 \cdot 20 + 13,$$

und damit

$$a_0 = 13, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 3.$$